

GUIA 11: **Transformación lineal**

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (y + z, x - y + 3z)$
- (b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, T(x, y) = (-x + y, x - 3y, 3x + y, 0)$
- (c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (2xy + 3z, 2xz - 2y)$
- (d) $T : \mathbf{P}_3 \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(p(x)) = p'(x)$
- (e) $T : \mathbf{P}_3 \longrightarrow \mathbf{P}_3, T(p(x)) = p(0)$
- (f) $T : \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}, T(a + bx + cx^2) = a + b + c$
- (g) $T : \mathbf{P}_3 \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(p(x)) = p(0) - p'(x)$
- (h) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}, T(A) = A + 2I$
- (i) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = \text{tr}A$
- (j) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = \det A$
- (k) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(A) = a_{11} + a_{12} + a_{13}$

2. Encontrar, si es posible, en cada caso una transformación lineal con las propiedades siguientes:

- (a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(1, -1) = (1, -1, 0), T(-1, 2) = (0, 1, -1).$
- (b) $T : \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(x^2) = x + 1, T(x) = x^2 + 1, T(1) = 0.$
- (c) $T : \mathbf{P}_1 \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(x) = x^2 + 1, T(x + 1) = 0.$

3. Calcular la imagen y el núcleo de las siguientes transformaciones lineales:

- (a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y) = (2x + y, 3y, x + y)$
- (b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x - y, y - z).$
- (c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + 2y, x + z, 2y + z)$
- (d) $T : \mathbf{P}_3 \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(p(x)) = p'(x).$
- (e) $T : \mathbf{P}_2 \longrightarrow \mathbf{P}_2, T(p(x)) = xp'(x).$
- (f) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}, T(A) = \text{tr}(A).$

4. Se sabe que $\dim \text{Nu}(T) = 2$. Hallar la dimensión de $\text{Im}(T)$, cuando la transformación lineal T está definida en cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

- (a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4.$
- (b) $T : \mathbf{P}_4 \longrightarrow \mathbf{P}_4.$
- (c) $T : \mathbf{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$
- (d) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^8.$

5. Se sabe que $\dim \text{Im}(T) = 2$. Hallar la dimensión del núcleo de T , cuando la transformación lineal T está definida en cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) $T : \mathbf{P}_1 \longrightarrow \mathbf{P}_1$.

(c) $T : \mathbf{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$.

(d) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \longrightarrow \mathcal{M}_{3 \times 1}$.